Dragoș Petrică Paul-Cosmin Manea Mihai Iulian Burdușa
Marius Antonescu Florin Antohe Lucia Popa Agnes Voica

Matematică

algebră, geometrie

Caiet de lucru. Clasa a VII-a
Partea I

✔ **Modalităţi de lucru diferenţiate**
✔ **Pregătire suplimentară prin planuri individualizate**

Soluțiile testelor de autoevaluare pot fi consultate la adresa:
http://www.edituraparalela45.ro/wp-content/uploads/2017/07/solutii_teste_de_autoevaluare_consolidare_clasa7_sem1_2018.pdf

Editura Paralela 45

Cuprins

ALGEBRĂ

Capitolul I. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

1 Mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q}$; incluziunea $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor

Competența:
Identificarea caracteristicilor numerelor raționale și a formelor de scriere a acestora în contexte variate

Ce știu

Fracțiile $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ $(a,c \in \mathbb{N},\ b,d \in \mathbb{N}^*)$ se numesc echivalente dacă $ad = bc$. În acest caz scriem $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc$.

Transformarea fracțiilor ordinare în fracții zecimale:

O fracție ordinară $\frac{a}{b}$, $a \geq 1, b \geq 2$ se transformă într-o fracție zecimală prin împărțirea numărătorului la numitor. Este recomandat ca, până la efectuarea acestei împărțiri, fracția să se simplifice până la o fracție ireductibilă.

Transformarea fracțiilor zecimale în fracții ordinare:

- **Fracții zecimale finite:** $\overline{a_1a_2...a_m}, \overline{b_1b_2...b_n} = \frac{\overline{a_1a_2...a_mb_1b_2...b_n}}{10^n}$
- **Fracții zecimale periodice simple:** $\overline{a_1a_2...a_m},(\overline{b_1b_2...b_n}) = \frac{\overline{a_1a_2...a_mb_1b_2...b_n} - \overline{a_1a_2...a_m}}{\underbrace{99...9}_{n \text{ cifre}}}$
- **Fracții zecimale periodice mixte:**

$$\overline{a_1a_2...a_m},\overline{b_1b_2...b_n}(\overline{c_1c_2...c_p}) = \frac{\overline{a_1a_2...a_mb_1b_2...b_nc_1c_2...c_p} - \overline{a_1a_2...a_mb_1b_2...b_n}}{\underbrace{99...9}_{p \text{ cifre}}\underbrace{00...0}_{n \text{ cifre}}}$$

Ce aflu

Mulțimea numerelor raționale este: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$.

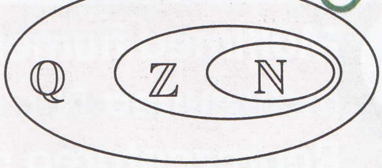
Prin convenție, orice fracție se numește număr rațional.

$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$, unde $\mathbb{Q}_-$ este mulțimea numerelor raționale negative, iar $\mathbb{Q}_+$ mulțimea numerelor raționale pozitive.

Exemple de numere din $\mathbb{Q}$: 0; 1; $-\frac{19}{4}$; 8,7; $\frac{110}{3}$; $-15{,}0(4)$ etc.

Cunoaștem deja că $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

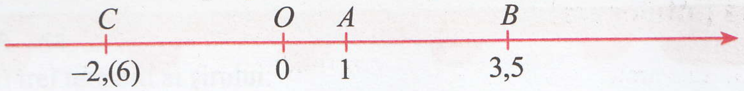
Oricare ar fi $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{x}{1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Avem, aşadar: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.



Observaţie: Orice număr întreg este număr raţional.

Reciproca este falsă: de exemplu, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, dar $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Considerăm o axă cu originea în punctul O. Numărului raţional 0 îi corespunde punctul O, iar oricărui număr raţional pozitiv îi corespunde un punct pe axă situat la dreapta originii, oricărui număr raţional negativ, un punct situat la stânga originii, ţinând cont şi de faptul că, dacă $x > y$, punctul corespunzător numărului raţional x este situat la dreapta punctului corespunzător numărului raţional y.



Ce am înțeles

1. Stabileşte care dintre propoziţiile următoare sunt adevărate şi care sunt false:

a) Numărul 0,(3) este întreg. ☐

b) Numărul 1,2 scris sub formă de fracţie ordinară ireductibilă este egal cu $\frac{6}{5}$. ☐

c) Orice număr raţional este număr natural. ☐

d) Dacă $0,(a) = \frac{1}{3}$, atunci $a = 3$. ☐

2. Completează spaţiile punctate cu răspunsul corect.

a) Numărul $\frac{12}{5}$ scris sub formă de fracţie zecimală este egal cu ………… .

b) Mulţimea numerelor întregi este inclusă în mulţimea numerelor ………………… .

c) A şasea zecimală a numărului 3,(456) este ……… .

d) Dacă $\frac{5}{n}$ este un număr întreg, atunci $n \in \{$……………………………$\}$.

Știu cum să rezolv

1 Transformă următoarele fracţii ordinare în fracţii zecimale: **a)** $\frac{77}{25}$; **b)** $\frac{237}{9}$; **c)** $\frac{1}{6}$.

Soluţie: **a)** $\frac{77}{25} = 3{,}08$; **b)** $\frac{237}{9} = 26{,}(3)$; **c)** $\frac{1}{6} = 0{,}1(6)$.

2 Transformă următoarele fracţii zecimale în fracţii ordinare: **a)** 5,7; **b)** 5,(31); **c)** 0,12(5).

Soluţie: **a)** $5{,}7 = \frac{57}{10}$; **b)** $5{,}(31) = \frac{531-5}{99} = \frac{526}{99}$; **c)** $0{,}12(5) = \frac{125-12}{900} = \frac{113}{900}$.

3 Arată că fracţia $\frac{n}{n+1}$ este ireductibilă, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie: Fie $d = (n, n+1) \Rightarrow \begin{cases} d \mid n \\ d \mid n+1 \end{cases} \Rightarrow d \mid n+1-n \Rightarrow d \mid 1 \overset{n \in \mathbb{N}^*}{\Rightarrow} d = 1$. Rezultă că fracţia $\frac{n}{n+1}$ este ireductibilă, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

4 Află $n \in \mathbb{Z}$, știind că $\frac{3n+4}{2n+1} \in \mathbb{Z}$.

Soluție: Cum $\frac{3n+4}{2n+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2n+1 \mid 3n+4$. Cum $2n+1 \mid 2n+1 \Rightarrow \begin{cases} 2n+1 \mid 6n+8 \\ 2n+1 \mid 6n+3 \end{cases} \Rightarrow 2n+1 \mid 5 \Rightarrow 2n+1 \in \{-5, -1, 1, 5\} \Rightarrow 2n \in \{-6, -2, 0, 4\} \Rightarrow n \in \{-3, -1, 0, 2\}$.

Mă antrenez

ACTIVITĂȚI MATEMATICE DIFERENȚIATE

Dificultate redusă (Înțelegere)

1 Încercuiește variantele adevărate:
a) $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$; b) $-\frac{9}{3} \notin \mathbb{Z}$; c) $-2,(6) \notin \mathbb{Q}$;
d) $\frac{4}{7} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; e) $\frac{-1}{-7} \in \mathbb{Q}_+$.

2 Reprezintă pe axă numerele 2,5 și $\frac{7}{2}$. Care dintre ele este situat în dreapta celuilalt?

3 Scrie sub formă de fracție zecimală numerele:
a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{3}{2}$; c) $\frac{413}{10}$; d) $\frac{14}{3}$; e) $\frac{125}{18}$.

4 Scrie sub formă de fracție ordinară numerele:
a) 0,77; b) 120,03; c) 17,0801; d) 1,4; e) 5,55.

5 Scrie sub formă de fracție ordinară numerele:
a) 10,(3); b) 1,(01); c) 1757,(7);
d) 0,(397); e) 1,(1).

6 Scrie sub formă de fracție ordinară numerele:
a) 0,0(3); b) 14,15(10); c) 1,7(71);
d) 4,9(01); e) 2,1178(4).

7 Determină elementele mulțimii:
$$\left\{\frac{11}{3}, \frac{-15}{-3}, \frac{1}{4}, 7^2, (-2)^4, \frac{0}{6}, \frac{100}{10^2}, \frac{15}{7}\right\} \cap \mathbb{N}.$$

8 Știind că numărul rațional x este reprezentat pe axa numerelor în stânga originii, iar numărului rațional y îi corespunde pe axă un punct situat în dreapta originii, care dintre cele două numere este mai mare?

9 Câte numere raționale sunt scrise sub formă de fracție cu numitorul 3, iar numărătorul divizor întreg al lui 6? Câte dintre acestea sunt numere întregi? Dar naturale?

10 Scrie ordinea reprezentării pe axa numerelor de la stânga la dreapta pentru următoarele numere raționale, scriindu-le sub formă de fracție zecimală:
a) $\frac{44}{7}$; b) $\frac{13}{5}$; c) $\frac{108}{90}$; d) $\frac{80}{17}$; e) $\frac{489}{21}$.

11 Scrie ordinea reprezentării pe axa numerelor de la stânga la dreapta pentru următoarele numere raționale, scriindu-le sub formă de fracție ordinară:
a) 10,3; b) 4,26; c) 0,(63); d) 1,5; e) 4,2(3).

12 Folosind descompunerea în factori primi a numitorului, stabilește în ce tip de fracție zecimală (finită, periodică simplă sau periodică mixtă) se transformă următoarele fracții ireductibile:
a) $\frac{121}{24}$; b) $\frac{7}{32}$; c) $\frac{2}{85}$; d) $\frac{7}{66}$; e) $\frac{29}{1001}$.

13 Fie mulțimea $A = \left\{4\frac{1}{6}; 2,(3); -178; \frac{8}{2}; \frac{-6}{-1}; \frac{4}{17}\right\}$.
Câte elemente au fiecare dintre mulțimile de mai jos?
a) $A \cap \mathbb{Z}$; ....
b) $\{x \in A \mid x > 0\}$; ....
c) $\{x \in A \mid x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}\}$. ....

14 Scrie elementele mulțimii $A = \left\{\frac{a}{b} \mid a \text{ este număr prim mai mic decât 6, } b \text{ este divizor întreg al lui 3}\right\}$.

15 Șapte copii joacă următorul joc: unul dintre ei scrie pe tablă fracția $\frac{1}{7}$, apoi fiecare dintre ceilalți șase elevi își alege câte o zecimală din cele obținute transformând fracția $\frac{1}{7}$ în fracție zecimală (primul alege zecimea, al doilea sutimea etc.). Cel care a scris pe tablă fracția le spune colegilor săi că dacă își alege și el una dintre următoarele zecimale, aceasta va fi egală cu a unuia dintre cei șase colegi. Are dreptate sau nu?

✱✱ Dificultate medie (Consolidare)

16 Determină-l pe a, știind că $\dfrac{1}{a} = 0,(a)$.

17 Calculează suma primelor 10 zecimale ale fiecăruia dintre numerele raționale $\dfrac{13}{9}, \dfrac{1675}{9990}, \dfrac{4}{3}$.

18 Determină elementele mulțimilor:

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \dfrac{19}{2x+3} \in \mathbb{Z} \right\}$;

b) $B = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \dfrac{x+2}{2x+1} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \right\}$;

c) $C = \left\{ \dfrac{17n-3}{4n+1} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cap \mathbb{Z}$.

19 Află probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $A = \left\{ \dfrac{31}{4}, \dfrac{51}{13}, \dfrac{2017}{16}, \dfrac{101}{35}, \dfrac{700}{37} \right\}$, acesta să fie fracție zecimală periodică simplă.

20 Arată că următoarele fracții sunt ireductibile, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $\dfrac{3n+5}{4n+7}$; b) $\dfrac{n+a}{n+a+1}$, $a \in \mathbb{N}$; c) $\dfrac{7n+12}{3n+5}$;

d) $\dfrac{5n+7}{7n+10}$; e) $\dfrac{6n-2}{8n-3}$; f) $\dfrac{4n-1}{2n+1}$.

21 Află mulțimile:

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \dfrac{18}{3x-1} \in \mathbb{Z} \right\}$;

b) $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \dfrac{12}{2x+1} \in \mathbb{N} \right\}$;

c) $C = \left\{ x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \dfrac{7x-3}{3x+2} \in \mathbb{Z} \right\}$;

d) $D = \left\{ x \in \mathbb{N} \;\middle|\; \dfrac{9x+7}{3x+1} \in \mathbb{Z} \right\}$.

22 Fie numărul rațional 4,15(384615). Determină:

a) a 9-a zecimală a numărului;

b) a 77-a zecimală a numărului;

c) a 2000-a zecimală a numărului.

23 Determină cifrele a, b, astfel încât $\dfrac{\overline{1a0}}{\overline{b5}} \in \mathbb{Z}$.

24 Determină numărul rațional scris sub formă de fracție zecimală $\overline{1,403(abc)}$, știind că a 2000-a cifră după virgulă este 2, a 2017-a zecimală este 8, iar a 2019-a este 1.

✱✱✱ Dificultate crescută (Aprofundare și performanță)

25 Determină toate numerele raționale $\overline{1,a(b)}$, știind că are loc egalitatea $\overline{1,a(b)} = \dfrac{\overline{9b}}{\overline{9a}}$.

26 Arată că următoarele fracții sunt reductibile:

a) $\dfrac{5^n+1}{n^2+n}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{n^2-n+2}$, unde $a, b, c, n \in \mathbb{N}$;

c) $\dfrac{5^{n+1} \cdot 2^n + 1}{5^n \cdot 2^{n+1} + 1}$.

27 Află cifrele nenule a, b, c, știind că:

a) $0,\overline{ab}(c) + 0,\overline{bc}(a) + 0,\overline{ca}(b) = 0,(6)$;

b) $\overline{0,ab(c)} + \overline{0,bc(a)} + \overline{0,ca(b)} = 1,(6)$.

28 Determină cifra x, știind că numărul rațional $\dfrac{1}{0,1(x)}$ este număr natural.

29 Câte elemente are mulțimea:

$$A = \left\{ \dfrac{2p+q}{p-q} \mid p, q \in \mathbb{N}^* \text{ numere prime} \right\} \cap \mathbb{N}.$$

30 Determină numărul rațional pozitiv scris sub formă de fracție $\dfrac{a}{b}$, știind că, dacă adunăm 1 la numărător și 2 la numitor, acesta se înjumătățește.