

Matematică

algebră, geometrie

Caiet de lucru. Clasa a VII-a Partea I

✓ **Modalități de lucru diferențiate**

✓ **Pregătire suplimentară prin planuri individualizate**

Soluțiile testelor de autoevaluare pot fi consultate la adresa:

http://www.edituraparelela45.ro/wp-content/uploads/2017/07/solutii_teste_de_autoevaluare_consolidare_clasa7_sem1_2018.pdf

RECAPITULARE

Modele de teste pentru evaluarea inițială.....	3
--	---

ALGEBRĂ

Capitolul I. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

1. Mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q}$; incluziunea $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor.....	5
2. Opusul unui număr rațional. Modulul unui număr rațional. Compararea și ordonarea numerelor raționale ...	10
3. Adunarea numerelor raționale; proprietăți; scăderea numerelor raționale.....	15
4. Înmulțirea numerelor raționale; proprietăți.....	20
5. Împărțirea numerelor raționale	24
6. Puterea unui număr rațional; reguli de calcul cu puteri	28
7. Ordinea efectuării operațiilor	32
8. Ecuații de forma $ax + b = 0$, cu $a \in \mathbb{Q}^*$, $b \in \mathbb{Q}$	36
9. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	40
Test de autoevaluare.....	44
Recapitulare și sistematizare prin teste	45
Probleme pregătitoare pentru olimpiade și concursuri	47

Capitolul II. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

10. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect. Algoritm de extragere a rădăcinii pătrate	48
11. Rădăcina pătrată a unui număr rațional nenegativ	52
12. Modulul unui număr real. Reprezentarea pe axă a numerelor reale. Aproximări și rotunjiri. Ordonări.....	56
13. Reguli de calcul cu radicali.....	61
Test de autoevaluare.....	67
Recapitulare și sistematizare prin teste	68
14. Operații cu numere reale	70
15. Raționalizarea numitorului unei fracții	76
16. Media geometrică a două numere reale nenegative	82
Test de autoevaluare.....	86
Recapitulare și sistematizare prin teste	87
Probleme pregătitoare pentru olimpiade și concursuri	89

GEOMETRIE

Capitolul I. PATRULATERE

17. Patrulater convexe	90
18. Paralelogramul	94
19. Dreptunghiul	98
20. Rombul.....	102
21. Pătratul	106
22. Trapezul.....	110
23. Centrul de simetrie și axe de simetrie pentru poligoanele studiate.....	114
Test de autoevaluare.....	118
Recapitulare și sistematizare prin teste	119
24. Aria unui triunghi.....	121
25. Ariile patrulaterelor	125

Test de autoevaluare.....	130
Recapitulare și sistematizare prin teste	131
Probleme pregătitoare pentru olimpiade și concursuri	133

Capitolul II. ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

26. Segmente proporționale	134
27. Teorema lui Thales	137
28. Linia mijlocie într-un triunghi.....	141
29. Linia mijlocie a trapezului	144
30. Teorema fundamentală a asemănării.....	147
31. Criterii de asemănare a două triunghiuri.....	151
Test de autoevaluare.....	155
Recapitulare și sistematizare prin teste	156
Probleme pregătitoare pentru olimpiade și concursuri	158

MODELE DE TEZĂ	159
-----------------------------	-----

RĂSPUNSURI	161
-------------------------	-----

1

Mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q}$; incluziunea $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor

Competența:

Identificarea caracteristicilor numerelor raționale și a formelor de scriere a acestora în contexte variate

Ce știu

Fracțiile $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ ($a, c \in \mathbb{N}, b, d \in \mathbb{N}^*$) se numesc echivalente dacă $ad = bc$. În acest caz scriem $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc$.

Transformarea fracțiilor ordinare în fracții zecimale:

O fracție ordinară $\frac{a}{b}$, $a \geq 1, b \geq 2$ se transformă într-o fracție zecimală prin împărțirea numărătorului la numitor. Este recomandat ca, până la efectuarea acestei împărțiri, fracția să se simplifice până la o fracție ireductibilă.

Transformarea fracțiilor zecimale în fracții ordinare:

- **Fracții zecimale finite:** $\overline{a_1 a_2 \dots a_m, b_1 b_2 \dots b_n} = \frac{a_1 a_2 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n}{10^n}$
- **Fracții zecimale periodice simple:** $\overline{a_1 a_2 \dots a_m, (b_1 b_2 \dots b_n)} = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n} - \overline{a_1 a_2 \dots a_m}}{\underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ cifre}}}$
- **Fracții zecimale periodice mixte:**

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_m, b_1 b_2 \dots b_n (c_1 c_2 \dots c_p)} = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n c_1 c_2 \dots c_p} - \overline{a_1 a_2 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n}}{\underbrace{99 \dots 9}_{p \text{ cifre}} \underbrace{00 \dots 0}_{n \text{ cifre}}}$$

Ce aflu

 Mulțimea numerelor raționale este: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$.

Prin convenție, orice fracție se numește număr rațional.

$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$, unde $\mathbb{Q}_-$ este mulțimea numerelor raționale negative, iar $\mathbb{Q}_+$ mulțimea numerelor raționale pozitive.

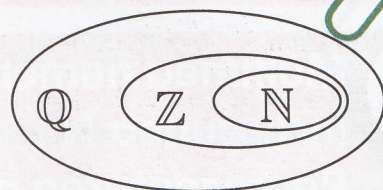
Exemple de numere din $\mathbb{Q}$: $0; 1; -\frac{19}{4}; 8,7; \frac{110}{3}; -15,0(4)$ etc.

 Cunoaștem deja că $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

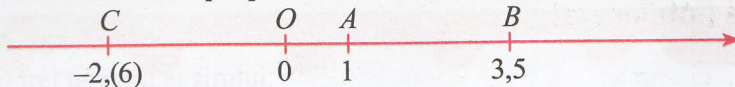
Oricare ar fi $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{x}{1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Avem, așadar: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Observație: Orice număr întreg este număr rațional.

Reciproca este falsă: de exemplu, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, dar $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.



Considerăm o axă cu originea în punctul O . Numărului rațional 0 îi corespunde punctul O , iar oricărui număr rațional pozitiv îi corespunde un punct pe axă situat la dreapta originii, oricărui număr rațional negativ, un punct situat la stânga originii, ținând cont și de faptul că, dacă $x > y$, punctul corespunzător numărului rațional x este situat la dreapta punctului corespunzător numărului rațional y .



Ce am înțeles

1. Stabilește care dintre propozițiile următoare sunt adevărate și care sunt false:

- a) Numărul 0,(3) este întreg. ☐
- b) Numărul 1,2 scris sub formă de fracție ordinară ireductibilă este egal cu $\frac{6}{5}$. ☐
- c) Orice număr rațional este număr natural. ☐
- d) Dacă $0,(a) = \frac{1}{3}$, atunci $a = 3$. ☐

2. Completează spațiile punctate cu răspunsul corect.

- a) Numărul $\frac{12}{5}$ scris sub formă de fracție zecimală este egal cu
- b) Mulțimea numerelor întregi este inclusă în mulțimea numerelor
- c) A șasea zecimală a numărului 3,(456) este
- d) Dacă $\frac{5}{n}$ este un număr întreg, atunci $n \in \{.....\}$.

Știu cum să rezolv

1 Transformă următoarele fracții ordinare în fracții zecimale: a) $\frac{77}{25}$; b) $\frac{237}{9}$; c) $\frac{1}{6}$.

Soluție: a) $\frac{77}{25} = 3,08$; b) $\frac{237}{9} = 26,(3)$; c) $\frac{1}{6} = 0,1(6)$.

2 Transformă următoarele fracții zecimale în fracții ordinare: a) 5,7; b) 5,(31); c) 0,12(5).

Soluție: a) $5,7 = \frac{57}{10}$; b) $5,(31) = \frac{531-5}{99} = \frac{526}{99}$; c) $0,12(5) = \frac{125-12}{900} = \frac{113}{900}$.

3 Arată că fracția $\frac{n}{n+1}$ este ireductibilă, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție: Fie $d = (n, n+1) \Rightarrow \begin{cases} d | n \\ d | n+1 \end{cases} \Rightarrow d | n+1-n \Rightarrow d | 1 \Rightarrow d = 1$. Rezultă că fracția $\frac{n}{n+1}$ este ireductibilă, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

4 Află $n \in \mathbb{Z}$, știind că $\frac{3n+4}{2n+1} \in \mathbb{Z}$.

Respect pentru oameni și cărți

Soluție: Cum $\frac{3n+4}{2n+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2n+1 \mid 3n+4$. Cum $2n+1 \mid 2n+1 \Rightarrow \begin{cases} 2n+1 \mid 6n+8 \\ 2n+1 \mid 6n+3 \end{cases} \Rightarrow 2n+1 \mid 5 \Rightarrow 2n+1 \in \{-5, -1, 1, 5\} \Rightarrow 2n \in \{-6, -2, 0, 4\} \Rightarrow n \in \{-3, -1, 0, 2\}$.

Mă antrenez

ACTIVITĂȚI MATEMATICE DIFERENȚIATE

* Dificultate redusă (Înțelegere)

1 Încercuiește variantele adevărate:

- a) $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$; b) $-\frac{9}{3} \notin \mathbb{Z}$; c) $-2,(6) \notin \mathbb{Q}$;
d) $\frac{4}{7} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; e) $-\frac{1}{-7} \in \mathbb{Q}_+$.

2 Reprezintă pe axă numerele 2,5 și $\frac{7}{2}$. Care dintre ele este situat în dreapta celuilalt?

3 Scrie sub formă de fracție zecimală numerele:

- a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{3}{2}$; c) $\frac{413}{10}$; d) $\frac{14}{3}$; e) $\frac{125}{18}$.

4 Scrie sub formă de fracție ordinară numerele:

- a) 0,77; b) 120,03; c) 17,0801; d) 1,4; e) 5,55.

5 Scrie sub formă de fracție ordinară numerele:

- a) 10,(3); b) 1,(01); c) 1757,(7);
d) 0,(397); e) 1,(1).

6 Scrie sub formă de fracție ordinară numerele:

- a) 0,0(3); b) 14,15(10); c) 1,7(71);
d) 4,9(01); e) 2,1178(4).

7 Determină elementele mulțimii:

$$\left\{ \frac{11}{3}, \frac{-15}{-3}, \frac{1}{4}, 7^2, (-2)^4, \frac{0}{6}, \frac{100}{10^2}, \frac{15}{7} \right\} \cap \mathbb{N}.$$

8 Știind că numărul rațional x este reprezentat pe axa numerelor în stânga originii, iar numărului rațional y îi corespunde pe axă un punct situat în dreapta originii, care dintre cele două numere este mai mare?

9 Câte numere raționale sunt scrise sub formă de fracție cu numitorul 3, iar numărătorul divizor întreg al lui 6? Câte dintre acestea sunt numere întregi? Dar naturale?

10 Scrie ordinea reprezentării pe axa numerelor de la stânga la dreapta pentru următoarele numere raționale,

scriindu-le sub formă de fracție zecimală:

- a) $\frac{44}{7}$; b) $\frac{13}{5}$; c) $\frac{108}{90}$; d) $\frac{80}{17}$; e) $\frac{489}{21}$.

11 Scrie ordinea reprezentării pe axa numerelor de la stânga la dreapta pentru următoarele numere raționale, scriindu-le sub formă de fracție ordinară:

- a) 10,3; b) 4,26; c) 0,(63); d) 1,5; e) 4,2(3).

12 Folosind descompunerea în factori primi a numitorului, stabilește în ce tip de fracție zecimală (finită, periodică simplă sau periodică mixtă) se transformă următoarele fracții ireductibile:

- a) $\frac{121}{24}$; b) $\frac{7}{32}$; c) $\frac{2}{85}$; d) $\frac{7}{66}$; e) $\frac{29}{1001}$.

13 Fie mulțimea $A = \left\{ 4\frac{1}{6}; 2,(3); -178; \frac{8}{2}; \frac{-6}{-1}; \frac{4}{17} \right\}$.

Câte elemente au fiecare dintre mulțimile de mai jos?

- a) $A \cap \mathbb{Z}$;
b) $\{x \in A \mid x > 0\}$;
c) $\{x \in A \mid x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}\}$

14 Scrie elementele mulțimii $A = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \text{ este număr prim mai mic decât } 6, b \text{ este divizor întreg al lui } 3 \right\}$.

15 Șapte copii joacă următorul joc: unul dintre ei scrie pe tablă fracția $\frac{1}{7}$, apoi fiecare dintre ceilalți șase elevi își alege câte o zecimală din cele obținute transformând fracția $\frac{1}{7}$ în fracție zecimală (primul alege zecimea, al doilea sutimea etc.). Cel care a scris pe tablă fracția le spune colegilor săi că dacă își alege și el una dintre următoarele zecimale, aceasta va fi egală cu a unuia dintre cei șase colegi. Are dreptate sau nu?

*** Dificultate medie (Consolidare)

Respect pentru oameni și cărți

16 Determină-l pe a , știind că $\frac{1}{a} = \overline{0,(a)}$.

17 Calculează suma primelor 10 zecimale ale fiecăruia dintre numerele raționale $\frac{13}{9}$, $\frac{1675}{9990}$, $\frac{4}{3}$.

18 Determină elementele mulțimilor:

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{19}{2x+3} \in \mathbb{Z} \right\};$

b) $B = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{x+2}{2x+1} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \right\};$

c) $C = \left\{ \frac{17n-3}{4n+1} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cap \mathbb{Z}.$

19 Află probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $A = \left\{ \frac{31}{4}, \frac{51}{13}, \frac{2017}{16}, \frac{101}{35}, \frac{700}{37} \right\}$, acesta să fie fracție zecimală periodică simplă.

20 Arată că următoarele fracții sunt ireductibile, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $\frac{3n+5}{4n+7};$ b) $\frac{n+a}{n+a+1}, a \in \mathbb{N};$ c) $\frac{7n+12}{3n+5};$
d) $\frac{5n+7}{7n+10};$ e) $\frac{6n-2}{8n-3};$ f) $\frac{4n-1}{2n+1}.$

21 Află mulțimile:

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{18}{3x-1} \in \mathbb{Z} \right\};$

b) $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{12}{2x+1} \in \mathbb{N} \right\};$

c) $C = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{7x-3}{3x+2} \in \mathbb{Z} \right\};$

d) $D = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{9x+7}{3x+1} \in \mathbb{Z} \right\}.$

22 Fie numărul rațional $4,15(384615)$. Determină:

- a) a 9-a zecimală a numărului;
b) a 77-a zecimală a numărului;
c) a 2000-a zecimală a numărului.

23 Determină cifrele a, b , astfel încât $\frac{1a0}{b5} \in \mathbb{Z}$.

24 Determină numărul rațional scris sub formă de fracție zecimală $\overline{1,403(abc)}$, știind că a 2000-a cifră după virgulă este 2, a 2017-a zecimală este 8, iar a 2019-a este 1.

*** Dificultate crescută (Aprofundare și performanță)

25 Determină toate numerele raționale $\overline{1,a(b)}$, știind

că are loc egalitatea $\overline{1,a(b)} = \frac{9b}{9a}$.

26 Arată că următoarele fracții sunt reductibile:

a) $\frac{5^n+1}{n^2+n},$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{n^2-n+2},$ unde $a, b, c, n \in \mathbb{N};$

c) $\frac{5^{n+1} \cdot 2^n + 1}{5^n \cdot 2^{n+1} + 1}.$

27 Află cifrele nenule a, b, c , știind că:

a) $\overline{0,ab(c)} + \overline{0,bc(a)} + \overline{0,ca(b)} = 0,(6);$

b) $\overline{0,ab(c)} + \overline{0,bc(a)} + \overline{0,ca(b)} = 1,(6).$

28 Determină cifra x , știind că numărul rațional $\frac{1}{0,1(x)}$ este număr natural.

29 Câte elemente are mulțimea:

$$A = \left\{ \frac{2p+q}{p-q} \mid p, q \in \mathbb{N}^* \text{ numere prime} \right\} \cap \mathbb{N}.$$

30 Determină numărul rațional pozitiv scris sub formă de fracție $\frac{a}{b}$, știind că, dacă adunăm 1 la numărător și 2 la numitor, acesta se înjumătățește.